

Solution to the introduction to linear systems worksheet

$$1. a) \vec{y}' = \begin{bmatrix} -4 & -10 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \vec{y}$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^t$$

$$\vec{y}' = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} 2e^{2t} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^t$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -4 & -10 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \vec{y} &= \begin{bmatrix} -4 & -10 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} -4 & -10 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^t \\ &= \begin{bmatrix} 20-10 \\ -15+21 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} -8+10 \\ 6-7 \end{bmatrix} e^t \\ &= \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^t = \vec{y}' \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$b) \vec{y}' = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \vec{y}$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} \Rightarrow \vec{y}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

$$\text{And } \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-2t} \quad \checkmark$$

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2+0 \\ 0+1+0 \\ 0+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-4+3 \\ 0-2+6 \\ 0+0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{6t} & e^{-2t} \\ e^{6t} & -e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{6t} + 4e^{6t} & 2e^{-2t} - 4e^{-2t} \\ 4e^{6t} + 2e^{6t} & 4e^{-2t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6e^{6t} & -2e^{-2t} \\ 6e^{6t} & 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e^{6t} & e^{-2t} \\ e^{6t} & -e^{-2t} \end{bmatrix} \quad \checkmark$$