

### One-bit Full Adder: The Bad and the Ugly way

Attempt at using Boolean algebra to prove that Full Adder Sum = 3-Way Light Control, and that Full Adder Carry Out = Majority Gate.

$$\begin{aligned}
 S_o &= A \wedge B \wedge C \\
 &= (A \wedge B) \wedge C \\
 &= (AB' + A'B) \wedge C \\
 &= (AB' + A'B) * C' + (AB' + A'B)' * C \\
 &= AB'C' + A'BC' + C * ( (AB')' * (A'B)' ) \\
 &= AB'C' + A'BC' + C * ( (A' + B) * (A + B') ) \\
 &= AB'C' + A'BC' + C * ( A'A + A'B' + BA + BB' ) \\
 &= AB'C' + A'BC' + C * ( 0 + A'B' + AB + 0 ) \\
 &= AB'C' + A'BC' + C * ( A'B' + AB ) \\
 &= AB'C' + A'BC' + A'B'C + ABC \quad (3\text{-Way Light Control})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_o &= (C * (A \wedge B)) \wedge (AB) \\
 &= C * (AB' + A'B) \wedge (AB) \\
 &= (AB'C + A'BC) \wedge (AB) \\
 &= (AB'C + A'BC)(AB)' + (AB)(AB'C + A'BC)' \\
 &= (AB'C + A'BC)(A' + B') + (AB)((AB'C)' * (A'BC)') \\
 &= (AB'CA' + AB'CB' + A'BCA' + A'BCB') + \\
 &\quad + (AB)((A'+B+C') * (A+B'+C')) \\
 &= (0 + AB'C + A'BC + 0) + \\
 &\quad + (AB)(0 + A'B' + A'C' + AB + 0 + BC' + AC' + B'C' + C') \\
 &= AB'C + A'BC + (AB)(A'B' + A'C' + AB + BC' + AC' + B'C' + C') \\
 &= AB'C + A'BC + (0 + 0 + AB + ABC' + ABC' + 0 + ABC') \\
 &= AB'C + A'BC + AB + ABC' \\
 &= AB'C + A'BC + AB(C' + C) + ABC' \\
 &= AB'C + A'BC + ABC' + ABC + ABC' \\
 &= AB'C + A'BC + ABC' + ABC \\
 &= AB'C + A'BC + ABC' + ABC + ABC + ABC \\
 &= (AB'C + ABC) + (A'BC + ABC) + (ABC' + ABC) \\
 &= AC + BC + AB \quad (\text{Majority Gate})
 \end{aligned}$$